

リンクの信頼度を考慮に入れた経済 ネットワーク設計問題の実数値 GA による 最適化シミュレーション

加藤 康彦
坂上 智哉

概要

本研究では Jackson and Wolinsky¹²⁾ のコネクションモデルを拡張した「経済ネットワーク設計問題」について考える。具体的には各ノード(都市)の経済規模が異なり、各リンクの信頼度も異なるモデルへと拡張する。この拡張により設計変数(各リンクの信頼度)が $[0, 1]$ の連続値をとる経済ネットワーク設計問題となるため、本研究では、その最適化手法として実数値 GA (Real-coded GA) を用いて、コンピュータによる仮想都市間の経済ネットワークの最適化シミュレーションを試みる。

キーワード：進化計算，ネットワーク最適化，ネットワーク形成ゲーム理論

1. はじめに

我々の身の回りには様々なネットワークが存在している。インターネットや航空路線などはもちろん、タンパク質の相互作用もその一つとして考えることができる。そもそもネットワークとはノード(点)とリンク(線)の構造体であり、経済の諸現象も、ノードを経済プレイヤー(個人, 団体, 都市, 国家), リンクを経済プレイヤー間のつながり(交通網, 情報通信網, 経済地域連携)とすることで「経済ネットワーク」としてモデル化でき、これまでに多くの分析がネットワーク形成ゲーム理論に基づきなされてきた。ネットワーク形成ゲーム理論の代表的な研究には、Jackson and Wolinsky¹²⁾ や Bala and Goyal^{6), 7)} などがあり、この分野の多くの先行研究の基礎となっている。Jackson and Wolinsky¹²⁾ では、社会的なコミュニケーショ

ンネットワークを想定したコネクションモデルと研究者同士の共同研究ネットワークを想定した共著者モデルの2つのモデルについて、リンクが相手との合意の上で形成・分断される協力ネットワーク形成ゲームにおける分析がなされている。また Bala and Goyal^{6), 7)} では、リンク形成便益が費用を負担した方のノードのみが得られる一方向モデル(one-way flow model)と双方のノードがリンク形成利得を得られる双方向モデル(two-way flow model)の2つのモデルについて、リンクを相手との合意なしに形成・分断できる非協力ネットワーク形成ゲームにおける分析がなされている。

本研究では、経済主体間の取引のネットワークを想定するため、ネットワークの基本モデルとして Jackson and Wolinsky¹²⁾ のコネクションモデルを採用する。さらに、Jackson and Wolinsky¹²⁾ のコネクションモデルでは、各ノー

ド、各リンクが同質であったが、各ノード、各リンクが共に異質であるモデルを考える。具体的には、各ノード（都市）の経済規模が異なり、さらに各リンクの信頼度の異なる経済ネットワークモデルを考え、その最適化シミュレーションをコンピュータにより実行する。その際、「経済ネットワーク設計問題」の設計変数が $[0, 1]$ の連続値をとるリンクの信頼度であるため、最適化設計には、実数値 GA (Real-coded GA) を応用する。

本論文の構成は以下のとおりである。第 2 章で、リンクの信頼度を考慮に入れた「経済ネットワーク設計問題」を定式化する。第 3 章で拡張モデルにおいてネットワーク価値を導出するのに必要となる最信頼路を求める手法について述べる。次に、第 4 章で実数値 GA による「経済ネットワーク設計問題」の解法について述べ、第 5 章で実数値 GA に基づいた最適化シミュレーションを行う。最後に、第 6 章でシミュレーションに関する考察をして本研究のむすびとする。

2. 経済ネットワーク設計問題の定式化

n 人のノードからなる経済ネットワークは、頂点集合 V からなる完全グラフを K とすると、完全グラフ K の部分グラフ G として表現される。Jackson and Wolinsky¹²⁾ のコネクションモデルでは、 $w_i \geq 0$ をノード i の持つ固有の価値 (intrinsic value)、 c_{ij} をリンク ij の維持費用とすると、ノード i が経済ネットワーク G から得られる効用は、式 (1) で表現される。

$$u_i(G) = \sum_{j=1}^{|V|} r_{ij} w_j - \sum_{j=1, ij \in E}^{|V|} c_{ij} \quad (1)$$

ここで、 ij 間の最信頼路の信頼度を r_{ij} 、 E をリンク (エッジ) の集合とする。ノード i のノード j から得られる利得は、Jackson and Wolinsky¹²⁾ の場合、最短路からの経済的影響を考慮に入れていたが、本研究では、最信頼路からの経済的影響を考慮に入れた。つまり、期

待利得を最大化する路からの利得をノード j から得られるノード i の利得とする。

次に、ネットワーク価値 (ネットワーク全体の効用) を定義する。ネットワーク価値はネットワークに存在するすべてのノードの効用の総和とすると式 (2) となる。

$$u_{net}(G) = \sum_{i=1}^{|V|} u_i(G) \quad (2)$$

以上をまとめると、経済ネットワーク設計問題は、以下の様に定式化できる。

$$\begin{aligned} \operatorname{argmax}_{G \in K} u_{net}(G) \quad \text{Subject to} \\ \sum_{ij \in E} c_{ij} \leq C \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 C は予算制約を表す。また、 $G \in K$ は G が K の部分グラフであることを意味する。

3. 最信頼路

経路探索アルゴリズムには幅優先探索 (Breadth First Search) や深さ優先探索 (Depth First Search) をはじめ、様々なアルゴリズムが確立されている。特にグラフ上の 2 頂点間の最短経路を効率的に求めるアルゴリズムとして 1959 年に考案された手法であるダイクストラ法 (Dijkstra's Algorithm) は、最短経路問題のアルゴリズムの中で理論的に最も効率的なことが知られている。本研究ではノード間の最短経路ではなくノード間の最信頼路を求める方法として、ダイクストラ法を応用する。以下にダイクストラ法で最信頼路を求める方法を説明する。

Step1: ノード s と他のノード間の最信頼路の信頼度を初期化

ダイクストラ法では出発点となるノード s を決め、そこから扇状に探索の木を広げていくことで、ノード s から信頼度が高い順に各ノード i の最信頼路を求める。探索の過程において頂点集合 V はノード s との最信頼路が断定された頂点集合 P と仮の

最信頼路しか見つかっていない頂点集合 T とに分割される。アルゴリズムではまず、 $P = \{s\}, T = V \setminus \{s\}$ として、 $r_{ss} = 1$ とし、ノード s と他のノード i 間の最信頼路の信頼度を一時的に次のように置く。

$$r_{si} = \begin{cases} x_{si} & \text{if } si \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 x_{si} はノード s とノード i 間の直接リンクの信頼度を表す。仮の最信頼路の信頼度はノード s とノード i 間の直接リンクが存在する場合には x_{si} 、直接リンクが存在しない場合には 0 と置かれる。

Step 2: 集合 T の中から最も信頼度 r_{si} の高いノード i を選び、 r_{si} を最信頼路の信頼度として断定

Step 3: 集合 T からノード i を除き、集合 P にノード i を加える

Step 4: ノード i と直接リンクを持つ各ノード j の最信頼路の信頼度 r_{sj} を更新
ノード i と直接リンクを持つ各ノード j の最信頼路の信頼度 r_{sj} を更新する。もし仮に置かれている最信頼路の信頼度 r_{sj} が $r_{si}x_{ij}$ よりも低かった場合には r_{sj} を $r_{si}x_{ij}$ の値に置き直す。

Step 5: $P = V$ であれば終了、そうでなければ Step 2 に戻る

すべてのノード s と各ノード i 間の最信頼路の信頼度が断定された時点、つまり $P = V$ となったらアルゴリズムは終了となる。

4. 実数値 GA

遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm, GA) は、1960 年代に John Holland により提案された手法である。GA では複数の個体を用意し、繰り返し個体同士を掛け合わせることで解の探索を行う。実数値 GA では探索に用いる個体を従来の GA のビットストリングでは

なく、実数ベクトルを用いて表現する。実数値で直接探索を行うことにより実数値関数を最適化する問題の場合には、従来の GA よりも効率的であることが知られている。ただし、従来の GA で用いられる遺伝的オペレータは利用できず、交叉・突然変異には実数値 GA に特有な遺伝的オペレータが必要となる。

以下では実数 GA の手順について説明する。

Step 1: 初期集団の生成

複数の個体を設計変数ごとに実数値を実行可能領域内で一様乱数に従ってランダムに生成する。

Step 2: 評価

各個体の目的関数の値を求める。

Step 3: 選択

Step 2 で求めた適合度に基づいて次世代の親となる個体のペアを決定する。

Step 4: 交叉

本研究では実数値 GA 用の交叉手法の一つであるブレンド交叉 (BLX- α) を採用する。BLX- α では親個体が持つ実数ベクトルの各変数の区間 d_i を両側に ad_i だけ拡張した区間から一様乱数に従ってランダムに子個体を発生させる。

$$\begin{aligned} c_{1i} &= u(\min(p_{1i}, p_{2i}) - ad_i, \min(p_{1i}, p_{2i}) + ad_i) \\ c_{2i} &= u(\min(p_{1i}, p_{2i}) - ad_i, \min(p_{1i}, p_{2i}) + ad_i) \\ d_i &= |p_{1i} - p_{2i}| \end{aligned} \quad (5)$$

$\vec{P}_1 = (p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1m})$: 親個体 1

$\vec{P}_2 = (p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2m})$: 親個体 2

$\vec{C}_1 = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1m})$: 子個体 1

$\vec{C}_2 = (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2m})$: 子個体 2

$$u(\min(p_{1i}, p_{2i}) - ad_i, \max(p_{1i}, p_{2i}) + ad_i) \left[\min(p_{1i}, p_{2i}) - ad_i, \max(p_{1i}, p_{2i}) + ad_i \right]$$

の区間の一様乱数

α : ユーザー設定パラメータ

m : 遺伝子長

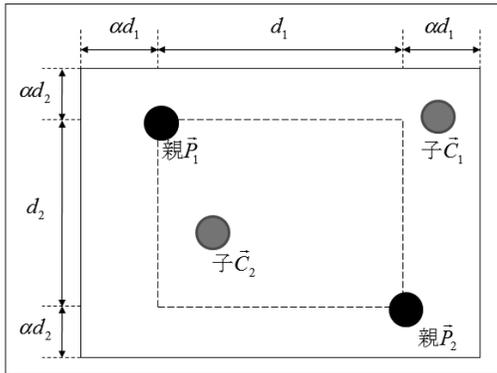


Fig. 1. 2次元 ($m=2$) における BLX- α による子個体生成

Step5 : 突然変異

突然変異手法には一様突然変異 (Uniform Mutation) を採用する。設計変数ごとに、実行可能領域 $[X_MIN, X_MAX]$ 内に一様乱数で新しい実数を発生させていく。ただし、突然変異の起こる確率は突然変異率に従う。突然変異の方向 (正か負か) を決定し、突然変異の方向が正ならば区間 $[x_i, \min(x_i+M, X_MAX)]$ 内に、負ならば区間 $[\max(X_MIN, x_i-M), x_i]$ 内に新しい実数を発生させる。

Step6 : Step2 ~ Step5 を終了条件が満たされるまで繰り返す。

5. コンピュータによる最適化シミュレーション

仮想都市を使ってシミュレーションを行った。 w_i として使用したデータを Table 1 に示す。

Table 1. w_i の値

1	17.6
2	5.8
3	4.4
4	2.9
5	4.5
6	3.6
7	5.3

また、直接リンクの維持費用 c_{ij} は信頼度の関数とする。高山ら⁴⁾の研究では信頼度の異なる数種のリンクから成るネットワーク設計を考え、リンクの信頼度に応じて費用を与えていた。本稿では費用関数をリンクの信頼度に応じた費用の額が高山らの研究と同程度となるような信頼度の連続関数とした。

$$c_{ij} \begin{cases} 0 & \text{if } x_{ij}=0 \\ 0.0238e^{5.9657x_{ij}} & \text{if } 0.70 \leq x_{ij} \leq 0.95 \\ P_n & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

ここで e はネイピア数、 x_{ij} は ij 間の直接リンクの信頼度、 P_n はペナルティを表す。信頼度が 0.70 未満のリンクや 0.95 を超えるようなリンクは現実的ではないとしてペナルティを課した。シミュレーションは、すべてのリンクの信頼度が 95% の完全グラフを構成するのに必要

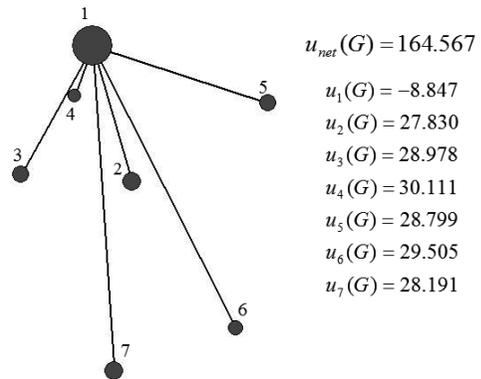


Fig. 2. シミュレーション結果

Table 2. 各リンクの信頼度

x_{ij}	1	2	3	4	5	6	7
1	-	0.910	0.904	0.890	0.948	0.883	0.932
2	0.910	-	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.904	0.000	-	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.890	0.000	0.000	-	0.000	0.000	0.000
5	0.948	0.000	0.000	0.000	-	0.000	0.000
6	0.883	0.000	0.000	0.000	0.000	-	0.000
7	0.932	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-

な予算を、ペナルティ P_n を 10 として行った。Fig. 1 に最適化により得られたネットワークを示す。また、そのときの各リンクの信頼度を Table 2 に示す。

6. おわりに

本研究では、まず、Jackson and Wolinsky¹²⁾ が提案したコネクションモデルの拡張として、各ノードが異質で各リンクが異なる信頼度を持つモデルを考えた。その特徴は、コネクションモデルにおいて各ノードの利得を最短経路から得られる利得としている点を、各ノードの利得は期待利得を最大化する経路（最信頼路）からの利得として捉え直すことでモデルの拡張をしたところにある。各リンクが異なる信頼度を持つ場合には、最短パスではなく最信頼路から得られる利得が各ノードの期待利得を最大化させるので、最信頼路からの利得をノードが得る利得としてモデルを拡張した。この拡張は、Jackson and Wolinsky¹²⁾ が提案したコネクションモデルにおける残存率を信頼度として置き換えることで、信頼度がすべてのリンクで等しい場合に最短経路と最信頼路が一致する点から見て本研究で提案したモデルは、Jackson and Wolinsky¹²⁾ が提案したコネクションモデルの自然な拡張となった。さらに、我々は、経済ネットワーク問題の最適化手法として、進化計算の 1 種である実数値 GA を応用することを提案しそのシミュレーションを行った。

参考文献

- 1) 伊庭斉志, 『進化論的計算手法』, オーム社, (2005)
- 2) 金光淳, 『社会ネットワーク分析の基礎 - 社会的関係資本論にむけて』, 勁草書房, (2003)
- 3) 坂上智哉, 加藤康彦, 宇野木広樹, 『九州の最適ネットワークについて - ネットワーク形成ゲー

ム理論による自治体統合問題のモデリングとシミュレーション - 』, 『応用経済学研究』, 1, 73-88, (2007)

- 4) 高山雄介, 松井和宏, 佐藤晴夫, 『GA によるネットワーク設計問題の解析について』, 平成 16 年度第 2 回情報処理学会東北支部研究会, (2004)
- 5) 廣安知之, 三木光範, 福永隆宏, 『遺伝的アルゴリズムにおける実数値ベクトル表現, 世代交代モデル, 母集団分割効果の検討』, 『同志社大学理工学研究報告』, 44 (1), 25-35, (2003)
- 6) Bala, V., Goyal, S., “A Non-cooperative Model of Network Formation”, *Econometrica*, 68, 1181-1229, (2000a)
- 7) Bala, V., and Goyal, S., “A strategic analysis of network reliability”, *Review of Economic Design*, 5, 205-228, (2000b)
- 8) Dijkstra, E. W., “A note on two problems in connexion with graphs”, *In Numerische Mathematik*, 1, 269-271, (1959)
- 9) Furusawa, T., Konishi, H., “Free Trade Networks”, *Journal of International Economics*, 72 (2), 310-335, (2002)
- 10) Goyal, S., Joshi, S., “Bilateralism and Free Trade”, *International Economic Review*, 47, 749-778, (2006)
- 11) Haller, H., Sarangi, S., “Nash networks with heterogeneous links”, *Mathematical Social Sciences*, 50, 181-201, (2005)
- 12) Jackson, M.O., Wolinsky, A., “A Strategic Model of Social and Economic Networks”, *Journal of Economic Theory*, 71, 44-74, (1996)
- 13) Johnson, C., Gilles, R.P., “Spatial Social Networks”, *Review of Economic Design*, 5, 273-300, (2000)

謝辞

本研究を行うにあたって、熊本学園大学大学院博士課程在学中の井上寛規氏には、プログラム開発に協力してもらった。深く感謝いたします。また、本研究は、熊本学園大学産業経営研究所の研究助成金(平成 22・23 年度)による。