ノード機能喪失対策費用投入ゲームとネットワーク形成ゲームに関する一考察[1]

宇野木　広　樹[2]

要　旨

本稿はネットワークからノードが消失してしまうことでノード間の情報や便益の伝達が行われなくなってしまう状況における戦略的ネットワーク形成モデルを提示する。

モデルにおいて各ノードは「ネットワークから得る便益を他のノードへ伝達する」、「自らの便益とネットワークを通じて他のノードから便益を得る」という２つの機能を確率的に失うが、各ノードは費用を投入することによって自らのノード機能喪失確率を変化させることができるものとする。モデルは、各ノードが戦略的にリンクを形成する「ネットワーク形成ゲーム」と、各ノードが機能喪失対策費用を投入する「ノード機能喪失対策費用投入ゲーム」の２つのゲームを考える。

各ノードが機能喪失対策費用を投入する「ノード機能喪失対策費用投入ゲーム」において、いかなるネットワークにおいても最大と最小のナッシュ均衡が存在することを示す。また、empty ネットワーク以外のいかなるネットワークもノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいてナッシュ均衡と効率性を同時達成できないことを示す。さらに、ネットワークを所与として、ナッシュ均衡と効率性のどちらの達成に際しても、他のノードに対して大きな影響を与えるノードほど多くの費用投入が必要となることを示す。

ネットワーク形成ゲームにおいては、empty ネットワーク、star ネットワーク、complete ネットワークがそれぞれナッシュネットワークとなる条件を導出する。また、empty ネットワークと complete ネットワークが効率的ネットワークとなる条件をそれぞれ導出する。

はじめに

現代社会において、情報の持つ価値は非常に高く、様々な情報がネットワークを通じて瞬時に伝達されている。また、現代社会においてどのようなネットワーク構造が情報を効率的に伝達することができるのかということは現代社会において非常に大きな分析テーマである。ネットワークに関する分析は物理・数学・工学・社会学・生物学など、多岐の分野で盛んに行われてきている。経済学において、ネットワーク形成に関する研究は、Jackson and Wolinsky（1996）以降、多くの研究が蓄積されている。これらの研究における代表的な研究としては、各ノードが一方的にリンクを形成・分断できる Bala and Goyal（2000a）と、Jackson and Wolinsky（1996）がまず挙げられる。

Jackson and Wolinsky（1996）は、同質的な

---

1 本研究は熊本学園大学産業経営研究所の研究助成金（平成26年度）による研究成果である。
2 中九州短期大学講師
連絡先　〒866-0074 熊本県八代市平山新町4438
Email：unoki@nkjc.ac.jp

ノードが主体的に意思決定を行う静学的ネットワーク形成ゲームにおけるネットワークの効率性とペア安定性（pairwise stability）を分析している。研究の中で、リンク形成費用と便益の残存率との関係によって、効率的なネットワークと安定的なネットワークがそれぞれどのような形状になるのかを分析している。また、ネットワークの効率性と安定性が必ずしも両立しないことを明らかにしている。

次に Bala and Goyal（2000a）では、同質的なノードがリンクを相手との合意なしに一方的にリンクを形成・分断することができる動学的リンク形成モデルの分析を行っている。便益がリンク費用を支出したノードにのみ発生する一方向モデル（one-way flow model）と、リンクが形成された際に便益が双方のノードに発生する双方向モデル（two-way flow model）の２つのモデルについて、ネットワークの効率性やネットワークがナッシュ均衡となる条件について分析している。

また、紹介した２つの研究以外にも、異質的なノード間のネットワーク形成を分析した研究として、Galeotti, Goyal and Kamphorst（2006）が挙げられる。Galeotti, Goyal and Kamphorst（2006）は、ノード間の便益の違いはネットワークの連結性にとって重要であり、リンク形成費用の違いはネットワーク連結性のみならず個々のコンポーネントの構造に対して決定的な影響を及ぼすことを示している。

また、ネットワーク分析においてネットワークのリスクを考慮したネットワークの頑健性が広く分析されるようになって来ており、ネットワーク形成ゲーム理論では、Bala and Goyal（2000b）において、リンクが情報（便益）を伝達する信頼性に焦点を当て、ネットワークにおける各リンクが確率的に削除されることによってネットワークフローが分断されてしまうというネットワークの分断リスクを考慮した分析が行われている。Bala and Goyal（2000b）は、ノード間に形成されるリンクが便益を伝達する信頼性に焦点をあて、効率的なネットワークとナッシュネットワーク（ネットワークがナッシュ均衡となっている）の性質を分析している。分析の結果、もしも社会が大きくて、リンク形成費用がある適当な範囲にあるならば、ナッシュネットワークと効率的ネットワークはともに全てのリンクが冗長であるようなネットワークになることを示している。また、リンク形成費用が非常に高いか低い場合、もしくはリンクが便益を伝達する信頼性が高いならば、効率性と安定性はほぼ一致することを示している。しかしながら、リンク形成費用とリンクが便益を伝達する信頼性が中程度ならば、ナッシュネットワークは社会的に最適なネットワークと比べてリンク形成が過少になってしまうかもしれないことを示している。

また、Bala and Goyal（2000b）を拡張した研究も多数あり、例えば Haller and Sarangi（2003）は各ノードにおいて便益とリンク形成費用は同質であるが、各リンクにおいて形成便益を伝達できる確率が異なるモデルを提示している。さらに、Haller, Kamphorst, and Sarangi（2007）は各ノードにおいて便益が異なり、各リンクにおいてリンク形成費用と便益を伝達できる確率がそれぞれ異なるモデルを提示し、ある特定のパラメーターのもとではナッシュ均衡が存在しないことを示している。

Bala and Goyal（2000b）に代表されるネットワークにおけるリンクの信頼性によってネットワークフローが分断されてしまう状況をモデル化するアプローチは、通信回線や交通路線などが分断されることでネットワークから情報や便益を得ることが出来なくなる状況を分析するのに適している。しかし、このようなアプローチは、企業の倒産や市場からの退出を考慮した企業間のネットワーク形成、都市災害が発生する事を考慮した都市間のネットワーク形成、サーバーダウンやウイルス感染による情報伝達の分断を考慮したネットワーク形成等の分析には適していない。このようなネットワークを分析す

るためには、各ノードがネットワークから消失してしまうことで各ノード間の情報や便益の伝達が行われなくなってしまうモデルを考慮する必要がある。

以上の状況を踏まえ、本稿では次の２つの仮定を導入し、ノードがネットワークから消失してしまう事でネットワークフローが分断される状況を分析するモデルを提示する。第１に、各ノードは確率的に「ネットワークから得る便益を他のノードへ伝達する」、「自らの便益とネットワークを通じて他のノードから便益を得る」という２つの機能を同時に失うという仮定を導入する。第２に、各ノードは自身に費用を投入することによって自身が機能を失う確率を変化させることが出来るものと仮定する。以上の仮定を導入し、各ノードがリンクを形成する「ネットワーク形成ゲーム」と、各ノードが機能喪失対策費用を投入する「ノード機能喪失対策費用投入ゲーム」の２つのゲームを考察する。

本稿の構成は次の通りである。第１節では、Bala and Goyal（2000b）に依拠して、各ノードがノード機能を確率的に失うネットワーク形成モデルを提示する。第２節では、ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおける効率性とナッシュ均衡に関して分析を行う。第３節では、ネットワーク形成ゲームにおける、ナッシュネットワークと効率的ネットワークの分析を行う。

1　戦略的ネットワーク形成モデル

本節ではBala and Goyal（2000b）に依拠して、各ノードがノード機能を確率的に失うモデルを提示する。

1.1 モデル

本稿ではリンク形成の際に相手との合意なしに一方的にリンクを形成することができる非協力的ネットワーク形成モデルを考え、Bala and Goyal（2000b）をもとにモデルを構築する。ノード集合を$N=\{1,\cdots,n\}$、$n\geq 3$であり有限であるとする。各ノードはそれぞれ便益を所有しており、ノード間に形成されたリンクを介して便益の伝達を行うことで自らの利得を高めることができるものとする。ノードiとノードjとの間に形成されたリンクはijと記し、リンクijを通じてノードiとノードj間で相互に便益が伝達されるものとする。本稿では、各ノードは同時にリンクを形成するものとする。ノードiのリンク形成戦略を行ベクトル$g_i=(g_{i1},\cdots,g_{ii-1},g_{ii+1},\cdots,g_{in})$にて記し、任意の$j\in N\setminus\{i\}$に関して$g_{ij}\in\{0,1\}$であるとする。ここで、$g_{ij}=1$ならばノード$i$はリンク$ij$の形成の為にリンク形成費用を拠出し、$g_{ij}=0$ならばノード$i$はリンク形成費用を拠出しないものとする。ノード$i$のリンク形成戦略集合を$G_i$、全てのノードのリンク形成戦略からなる戦略空間を$G=G_1\times\cdots\times G_n$、各ノードのリンク形成戦略の組を$g=(g_1,\cdots,g_n)$、$g\in G$と記す。本稿では無向ネットワークを対象として分析を行う。いま$\bar{g}_{ij}=\max\{g_{ij},\ g_{ji}\}$[3]、$\bar{g}_i=(\bar{g}_{i1},\cdots,\bar{g}_{ii-1},\bar{g}_{ii+1},\cdots,g_n)$と記し、無向ネットワークを$\bar{g}=(\bar{g}_1,\cdots,g_n)$にて定義する。$\bar{g}_{ij}=1$ならばノード$i,j$間に無向リンクが形成され、ノード$i,j$間において相互に便益が伝達されるものとする。一方、$\bar{g}_{ij}=0$ならばノードi,j間にリンクは形成されない。このことはリンクの形成においてノード間の合意は必要ではない事を示しており、本稿は非協力的ネットワーク形成モデルである。いま任意のリンクijの形成において、$g_{ij}=1$，$g_{ij}=0$ならばノードiのみリンク形成費用を拠出し、$g_{ij}=0$，$g_{ij}=1$ならばノードjのみリンク形成費用を拠出し、$g_{ij}=1$，$g_{ji}=1$ならばノードiとノードjのどちらか一方のみがリンク形成費用を拠出するものとする[4]。

各ノードは「リンクを通じて便益を他のノードへ伝達する」、「自らの便益とネットワークを

[3] ここで、$\bar{g}_{ij}$はノードi，j間に無向リンクが存在するか否かを示すものであり$\bar{g}_{ij}=\bar{g}_{ji}$とする。

通じて他のノードから便益を得る」という２つの機能を同時に確率的に失い、各ノードの機能喪失確率は各ノードにおいて独立であるとする。ここで、ノードが機能を失ったとしても、リンクはそのまま維持されており、リンク形成費用はノード機能が失われたとしても支払われるものとする。いま、ノード機能を失ったノードの集合をZとし、機能を失ったノードの数を$z \leq n$とする。一方、機能を失っていないノード集合を$I = N \setminus Z$とする。いま、$\bar{g}$を所与として、ノードが機能を失うことで実現されるネットワークを潜在ネットワークと呼び、z個のノードが機能を失った代表的潜在ネットワークを$\bar{g}_z^a$と記すことにする。z個のノードが機能を失った潜在ネットワークを$\bar{g}_z^a$の集合を$\bar{g}_z = \left\{\bar{g}_z^1, \bar{g}_z^2, \ldots, \bar{g}_z^{{}_nC_z}\right\}$と定義する。ここで、$\bar{g}_z$における潜在ネットワークの数$|\bar{g}_z|$は$n$個のノードのうち$z$個のノードが機能を失う組合せの総数であるので$|\bar{g}_z| = {}_nC_z = n!/z!(n-z)!$となる。また、潜在ネットワーク$\bar{g}_z^a$において機能を失っているノード集合を$Z(\bar{g}_z^a)$、機能を失っていないノード集合を$I(\bar{g}_z^a)$と記す。

【定義１】（経路）

潜在ネットワーク$\bar{g}_z^a$において、$\bar{g}_{ij} = 1$であるかもしくは$\bar{g}_{ii'} = \cdots = \bar{g}_{ii''} = 1$である非空な$\{i, i', \cdots, i'', j\} \subset I(\bar{g}_z^a)$が存在するならば、ノード$i, j$間に経路が存在するといい、潜在ネットワーク$\bar{g}_z^a$におけるノード$i, j$間の経路を$l_{ij}(\bar{g}_z^a)$と記す。

本稿では、任意の潜在ネットワークにおいて、任意のノードi, j間に経路が存在するならば、リンクijが存在せずともノードi, j間で便益の伝達が行われるものとする。

1.2 ノードの期待利得とネットワーク価値

いま、$\bar{g}_z^a$においてノードiが便益を得ることの出来るノードの集合を$N(i;\bar{g}_z^a) = \{k \in N \setminus \{i\} \mid l_{ik}(\bar{g}_z^a)\}$と記し、$g$においてノード$i$がリンク形成費用を拠出しているノードの集合を$N^d(i;g) = \{k \mid g_{ik} = 1\}$と記す。また、任意のノード$i$のノード機能喪失確率を$\alpha_i \in [0,1]$と記し、ノード機能喪失確率は自身にノード機能喪失対策費用投入s_iを行うことによって変化させることができるとする。ここで、s_iは$\bar{s}$を有限な正の実数であるとし、$0 \leq s_i \leq \bar{s}$である任意の実数であるとする。また、各ノードのノード機能喪失対策費用投入の組を$s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$と記す。$S$は$n$個のノードのノード機能喪失対策費用投入戦略の集合の直積$S = s_1 \times \cdots \times s_n$であり、ユークリッド空間の有界閉な凸集合である。

また、ノードiのノード機能喪失確率$\alpha_i : s_i \to R^+$はノード機能喪失対策費用投入s_iに関して連続関数であり、２回連続微分可能であるとし、

$$\alpha_i \in [0,1],\ \alpha_i(0) = \bar{\alpha} \leq 1,\ \alpha_i(\bar{s}) = \underline{\alpha} \geq 0,\ \alpha_i' = d\alpha_i / ds_i < 0,\ \alpha_i'' = d^2\alpha_i / ds_i^2 > 0,\ \lim_{s_i \to 0} \alpha_i' = -\infty^{5},\ \lim_{s_i \to \bar{s}} \alpha_i' = 0$$

であるとする。また、ノード機能喪失確率の関数形は各ノードに関して同一であり、$s_i = s_j$ならば$\alpha_i = \alpha_j$であるとする。

各ノードが機能を失う確率は独立であるので、sのもとで任意の潜在ネットワーク$\bar{g}_z^a$の実現確率$P(\bar{g}_z^a, s) \in [0,1]$は以下のようになる。

$$P(\bar{g}_z^a, s) = \prod_{x \in Z(\bar{g}_z^a)} \alpha_x \prod_{y \in I(\bar{g}_z^a)} (1 - \alpha_y).$$

また、$\bar{g}$を所与として、潜在ネットワーク$\bar{g}_z^a$に

---

[4] 本稿では各ノードがノード機能を失う確率はリンク形成費用とは無関係であり、双方のノードがリンク形成費用を拠出していたとしてもリンクを通じて得る便益は変わらないものとする。その結果、双方のノードがリンク形成費用を拠出しているリンクが存在するネットワークは効率的ではなく、ナッシュネットワークでもない。よって、分析を簡単化するためにこのように仮定する。

[5] ここで仮定しているものは、emptyネットワークを除く任意のネットワーク$\bar{g}$において任意のノードiが$s_i > 0$であるための十分条件であり、本来ならば、任意のノードi, jに関して$\lim_{s_i \to 0} \sum_{z=0}^{n-2} \left[-\alpha_i' \bar{\alpha}^z (1 - \bar{\alpha})^{n-z-1} w_{ii} \right] > 1$が満たされていれば十分である。

においてノード i の得る総便益 $B_i\left(\bar{g}_z^a \middle| \bar{g}\right)$ は以下で定義される。

$$B_i\left(\bar{g}_z^a \middle| \bar{g}\right) = w_{ii} + \sum_{j \in N\left(i;\bar{g}_z^a\right)} w_{ij}$$
$$= w_{ii} + V_i\left(\bar{g}_z^a \middle| \bar{g}\right).$$

ここで w_{ii} は自らが所有する便益であり、もしもノード i がノード機能を喪失した場合には失われてしまうと仮定する。また、w_{ij} はノード i がネットワークを通じてノード j から得ることのできる便益であり、$w_{ii}, w_{ij} > 0$、$w_{ii} > w_{ji}$ であるとする[6]。さらに、$V_i\left(\bar{g}_z^a \middle| \bar{g}\right)$ はノード i が潜在ネットワーク $\bar{g}_z^a$ においてネットワークを通じて他のノードから得ることのできる便益の合計であり、潜在ネットワーク $\bar{g}_z^a$ において、ノード i は自身がノード機能を失わない限り w_{ii} を獲得することが出来るが、w_{ij} を獲得するためにはノード i, j 間において経路 $l_{ij}(\bar{g}_z^a)$ が存在していなければならない。すなわち、ノード機能喪失対策費用の投入は、ネットワークからより多くの便益を得る側面と、自らの持つ便益を失わないようにする側面の２つの側面を持っている。もしも w_{ii} が非常に大きい場合には、たとえネットワークから得られる便益が少なかったとしても、各ノードは自らの持つ便益を失うリスクを低くするために多くのノード機能喪失対策費用投入を行うかもしれない。ここで、ノード i, j 間において複数の経路が存在する場合、最短経路のみから便益 w_{ij} は伝達され、他の経路からは便益 w_{ij} は伝達されないものとする。もしも潜在ネットワーク $\bar{g}_z^a$ においてノード i がノード機能を失った場合、$B_i(\bar{g}_z^a \,|\bar{g} = 0)$ とする。

また、g と s のもとでノード i が得る期待利得 $U_i(g, s)$ を以下のように定義する。

$$U_i\left(g,s\right) = \sum_{z=0}^{n-1} \sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z} \left[P\left(\bar{g}_{z,\{i\}}^a, s\right) B_i\left(\bar{g}_z^a \middle| \bar{g}\right)\right] - s_i - \sum_{j \in N^d(i;g)} c_{ij}. \quad (1)$$

ここで、$\bar{g}_{z,\{i\}}^a$ は z 個のノードが機能を失うときにノード i はノード機能を失わない任意の潜在ネットワークを表している。(1)式にて、c_{ij} は g においてリンク ij に対してノード i が拠出しているリンク形成費用であり、$\sum_{j \in N^d(i;g)} c_{ij}$ はノード i が拠出するリンク総形成費用である。ここで、$c_{ij} = c_{ji} > 0$ であるとする。また、(1)式の右辺第１項において、機能を失うノードの数が $n-1$ の場合までしか考慮されていない理由は、ノード i が機能を失う場合、ノード i はネットワーク便益を全く得ることができないので、ノード i を除く $n-1$ 個のノードの中から z 個のノードが機能を失う状況を考慮しているからである。

次に、g と s のもとでのネットワーク価値 $W(g, s)$ を全てのノードの期待利得の合計として以下のように定義する。

$$W\left(g,s\right) = \sum_{i=1}^{n} U_i\left(g,s\right). \quad (2)$$

2　ノード機能喪失対策費用投入ゲーム

本節は「ノード機能喪失対策費用投入ゲーム」を分析する。ノード機能喪失対策費用投入ゲームでは、各ノードは g を所与として、自らの期待利得を最大にするようにノード機能喪失対策費用を投入する。

2.1 スーパーモジュラーゲーム

まず、ノード機能喪失対策費用ゲームにおいて戦略的補完性が存在することを示す。以下では、$\bar{g}_{z,\{i_1,\cdots,i_k\},-\{j_1,\cdots,j_e\}}^a$ は z 個のノードが機能を失うときにノード $i_1, \cdots, i_k$ はノード機能を失わず、ノード $j_1, \cdots, j_e$ はノード機能を失っている任意の潜在ネットワークをあらわすものとする。また、$Z\left(\bar{g}_{z,\{i,j\}}^a\right) \cup \{i\}$ と $I\left(\bar{g}_{z,\{i,j\}}^a\right) \setminus \{i\}$ からなる潜在ネットワークを $\hat{g}_{z+1,\{j\},-\{i\}}^a$ と記すことにする。したがって、潜在ネットワーク $\bar{g}_{z,\{i,j\}}^a$ と潜在ネッ

[6] 例えば、ネットワークを通じて情報を交換する状況において、自らの持つ情報以上の事を相手に対して伝えることができない事を考えれば $w_{ii} > w_{ji}$ という仮定は許容できるものであろう。

トワーク$\hat{g}^{a}_{z+1,\{j\},-\{i\}}$の実現確率はそれぞれ以下のように表現することが出来る。

$$P\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i,j\}},s\right)=\left(1-\alpha_i\right)\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right),$$

$$P\left(\hat{g}^{a}_{z+1,\{j\},-\{i\}},s\right)=\alpha_i\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right).$$

次の補題１はノードjのノード機能喪失対策費用投入s_jの変化がノードiのノード機能喪失対策費用投入s_iに対してどのような影響を与えるのかを示している。

【補題１】任意のノード$i,j\neq i$に関して

$\dfrac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_i \partial s_j}>0$かつ$\dfrac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_j^2}<0$である。

補題１の$\partial^2 U_i(g,s)/\partial s_i \partial s_j>0$は戦略的補完性を示しており、ノード$i$が$s_i$のノード機能喪失対策費用投入を行って自身の期待利得の最大化を行っていた場合、ノードjのノード機能喪失対策費用投入s_jの変化はノードiの限界利得を変化させるので、以前のs_iのもとでは期待利得は最大化されなくなるためs_iを変化させる必要があるということを示唆している。たとえば、ノードiがs_iのノード機能喪失対策費用投入を行って自身の期待利得の最大化を行っていたとしよう。もしもs_jが増加したならばノードiの限界利得は以前と比べて増加するので、ノードiは期待利得の最大化を行うためにはs_iを増加させなければならない。

次に、以下の補題２はノードi以外の全てのノードがノード機能喪失対策費用投入を変化させた場合にはノードiのノード機能喪失対策費用投入s_iがどのように変化するのかを述べたものである。

【補題２】ノードi以外のすべてのノードがノード機能喪失対策費用投入を増加させたならば、ノードiもs_iを増加させる。

【命題１】ノード機能喪失対策費用投入ゲームはスーパーモジュラーゲームであり、任意のgを所与として、ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいて最大と最小のナッシュ均衡が存在する。

ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいてナッシュ均衡が存在することが示されたので、次項ではノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいてナッシュ均衡と効率性の同時達成問題について分析する。

2.2 ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおける均衡と効率性

まずgを所与として、ノードiを除く全てのノードのノード機能喪失対策費用投入の組$s_{-i}=(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n)$を所与として、ノード$i$の期待利得最大化条件を導出する。

$$\frac{\partial U_i\left(g,\left(s_i,s_{-i}\right)\right)}{\partial s_i}=\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[\frac{\partial P\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i\}},\left(s_i,s_{-i}\right)\right)}{\partial s_i}B_i\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i\}}\middle|\bar{g}\right)\right]-1$$
$$=\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[\left(-\alpha_i'\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)\right)B_i\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i\}}\middle|\bar{g}\right)\right]-1.$$

上式から最大化条件は以下のようになる。

$$\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}C_z}\left[-\alpha_i'\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)B_i\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i\}}\middle|\bar{g}\right)\right]=1. \quad (3)$$

次にgを所与として、$s^*=\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$がナッシュ均衡となる状況を考える。いま、$s^*=\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$がナッシュ均衡であるならば、任意のノード$i,j$について以下の(4)式が成立しなければならない。

$$\frac{\partial U_i\left(g,s^*\right)}{\partial s_i^*}=\frac{\partial U_j\left(g,s^*\right)}{\partial s_j^*}=0. \quad (4)$$

次に、gを所与として、ネットワーク価値が最大化されている場合、以下が成立していなければならない。

$s^E=\left(s_1^E,\ldots,s_n^E\right)$であるとき、任意の$i\neq j$であるノード$i,j$に対して

$$\frac{\partial W\left(g, s^{E}\right)}{\partial s_{i}^{E}}=\frac{\partial W\left(g, s^{E}\right)}{\partial s_{j}^{E}}=0. \tag{5}$$

(5)式を変形することで次の(6)式を得る。

$$\frac{\partial U_{i}\left(g, s^{E}\right)}{\partial s_{i}^{E}}+\sum_{\varepsilon \in N \backslash\{i\}}\left(\frac{\partial U_{\varepsilon}\left(g, s^{E}\right)}{\partial s_{i}^{E}}\right)=\frac{\partial U_{j}\left(g, s^{E}\right)}{\partial s_{j}^{E}}+\sum_{\tau \in N \backslash\{j\}}\left(\frac{\partial U_{\tau}\left(g, s^{E}\right)}{\partial s_{j}^{E}}\right) \cdot \tag{6}$$

本稿では(6)式が成立しているならば $s^{E}=\left(s_{1}^{E}, \ldots, s_{n}^{E}\right)$ は効率的であると呼ぶことにする。

次の命題2はノード機能喪失対策費用投入ゲームにおける効率的な戦略の組 s^E が唯一であり、s^E の下でネットワーク価値が最大化されることを保証するものである。

【命題2】ノード機能喪失対策費用投入において $s^{E}=\left(s_{1}^{E}, \ldots, s_{n}^{E}\right)$ の下でネットワーク価値 $W(g, s^E)$ は唯一の最大値となる。

ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいてナッシュ均衡と効率性が同時に達成できるか否かは重要な問題である。命題3はその問題に対する解答である。

【命題3】ノード機能喪失対策費用投入においてemptyネットワーク[7]はナッシュ均衡と効率性を常に同時達成する。一方、emptyネットワークではない任意のネットワークはナッシュ均衡と効率性を同時達成できない。

命題3が成立する原因は次のように解釈することが出来る。emptyネットワークではない任意のネットワークにおいて、ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいて効率性が達成されているならば任意のノード i に関して

$$\frac{\partial U_{i}\left(g, s^{E}\right)}{\partial s_{i}^{E}}+\sum_{\varepsilon \in N \backslash\{i\}}\left(\frac{\partial U_{\varepsilon}\left(g, s^{E}\right)}{\partial s_{i}^{E}}\right)=0$$

が成立していなければならない。ここで、$\partial U_{j}(g, s) / \partial s_{i}>0$ であるので、

$\sum_{j \in N \backslash\{i\}}\left(\partial U_{j}\left(g, s^{E}\right) / \partial s_{i}^{E}\right)>0$ となるため、効率性が達成されるためには $\partial U_{i}\left(g, s^{E}\right) / \partial s_{i}^{E}<0$ でなければならない。このことは、ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいて効率性を達成するためには、各ノードは自らの期待効用を最大化するノード機能喪失対策費用投入よりも過剰に費用を投入しなければならないということである。したがって、emptyネットワークではない任意のネットワークにおいて、ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいてナッシュ均衡と効率性は同時達成されないのである。命題3が示唆することは、ネットワーク価値を最大にするためには、各ノードが必要と思うよりも多くのノード機能喪失対策費用投入を行わせるためのルールが必要という事である。

以下では、ネットワークにおける各ノードのリンク形成状況によってノード機能喪失対策費用投入がどのように異なってくるのかを見ていこう。

【補題3】任意のノード $i, j \in N$ に関して $w_{ii}=w_{jj}$ であるとしよう。このとき、

$I\left(\bar{g}_{z,\{i\}}^{a}\right) \backslash\{i\}=I\left(\bar{g}_{z,\{j\}}^{a}\right) \backslash\{j\}$ かつ

$Z\left(\bar{g}_{z,\{i\}}^{a}\right) \backslash\{i\}=Z\left(\bar{g}_{z,\{j\}}^{a}\right) \backslash\{j\}$ である任意の $\bar{g}_{z,\{i\}}^{a}$ と

$\bar{g}_{z,\{j\}}^{a}$ に関して、$B_{i}\left(\bar{g}_{z,\{i\}}^{a} \mid \bar{g}\right) \geq B_{j}\left(\bar{g}_{z,\{j\}}^{a} \mid \bar{g}\right)$ ならば、

$N(i ; \bar{g}) \supseteq N(j ; \bar{g})$ である。

以下の命題4はあるネットワークにおいて、あるノード i が直接リンクを形成している任意のノードとは全てリンクを形成し、それ以外のノードとも直接リンクを形成しているノード j は、ナッシュ均衡においてノード i と比較してどのようなノード機能喪失対策費用投入を行っているのかを示している。

[7] 任意のノード $i, j \in N$ に関して $\bar{g}_{ij}=0$ であるネットワークをemptyネットワークと呼ぶ。すなわち、任意のノード間にリンクが形成されていないネットワークである。

【命題４】s^*がナッシュ均衡ならば、
$I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\setminus\{i\}=I\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\setminus\{j\}$ かつ
$Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\setminus\{i\}=Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\setminus\{j\}$ である任意の潜在ネットワーク $\bar{g}^a_{z,\{i\}}$ と $\bar{g}^a_{z,\{j\}}$ に関して
$B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\middle|\bar{g}\right)\geq B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\middle|\bar{g}\right)$ である$\bar{g}$の下では、ノードi, jのノード機能喪失対策費用投入は$s_i^*\geq s_j^*$である。

以下の命題５はあるネットワークにおいて、あるノードiが直接リンクを形成している任意のノードとは全てリンクを形成し、それ以外のノードとも直接リンクを形成しているノードjは、効率性が達成されるときにノードiと比較してどのようなノード機能喪失対策費用投入を行っているのかを示している。
【命題５】任意のノード$i, j\in N$に関して$w_{ii}=w_{jj}$であるとしよう。sが効率的ならば、
$I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\setminus\{i\}=I\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\setminus\{j\}$かつ
$Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\setminus\{i\}=Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\setminus\{j\}$である任意の潜在ネットワーク $\bar{g}^a_{z,\{i\}}$ と $\bar{g}^a_{z,\{j\}}$ に関して
$B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\middle|\bar{g}\right)\geq B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\middle|\bar{g}\right)$である $\bar{g}$ の下では、ノードi, jのノード機能喪失対策費用投入は$s_i^E\geq s_j^E$である。

命題４と命題５は、ネットワークにおいて、他のノードと比較して厳密に大きな影響を与える重要なノードは、ナッシュ均衡が達成されている状況と効率性が達成されている状況のどちらにおいても、多くのノード機能喪失対策費用投入を行う事が示されている。

3　ネットワーク形成ゲーム

本節では、「ネットワーク形成ゲーム」を分析する。ネットワーク形成ゲームでは、各ノードはsを所与として、自らの期待利得を最大にするように他のノードとの間にリンクを形成する。

ネットワーク形成ゲームにおける諸定義を以下に示す。ここで、gからノードiのリンク形成戦略g_iを削除したものを$g_{-i}=(g_1,\ldots,g_{i-1}, g_{i+1},\ldots,g_n)$と記す。また、$g$を$g_i$と$g_{-i}$の結び（$\oplus$として表記）として$g=g_i\oplus g_{-i}$と表記する。
【定義２】（最適反応）
sを所与として、任意の$g'_i\in G_i$に関して

$$U_i(g_i\oplus g_{-i},s)\geq U_i(g'_i\oplus g_{-i},s)$$

であるならば、g_iをg_{-i}に対する最適反応と呼ぶ。また、ノードiのg_{-i}に対する最適反応の集合を$BR_i(g_{-i})$と記すことにする。

【定義３】（ナッシュネットワーク）
sを所与として、任意のノードiに関して$g_i\in BR_i(g_{-i})$であるならばgをナッシュネットワークと呼ぶ。また、任意のノードに関して、現在の戦略から得られる利得が他のいかなる戦略をとったときの利得よりも厳密に高いならば、そのようなgを強ナッシュネットワークと呼ぶ。

【定義４】（効率的ネットワーク）
sを所与として、任意の$g'\in G$に関して$W(g, s)\geq W(g', s)$であるならば、gを効率的ネットワークと呼ぶ。

3.1 代表的ネットワーク

以下では、任意のノード$i, j\in N$に関して$\bar{g}_{ij}=1$であるネットワークをcompleteネットワークと呼び、g^cと記す。また、任意のノード$i, j\in N$に関して$\bar{g}_{ij}=0$であるネットワークをemptyネットワークと呼び、g^eと記す。また、任意のノード$j\neq i$に関して$\bar{g}_{ij}=1$であるノードiが唯一存在し、$j\neq k, k\neq i$である任意のノードj, kに関して$\bar{g}_{jk}=0$であるネットワークをstarネットワークと呼び、g^sと記す。ここで、もしもgにおいて任意のノード$j\in N\setminus\{i\}$に関して$\bar{g}_{ij}=1$であるノードiが存在するならば、そのノードをcentral nodeと呼ぶ。

3.2 ナッシュネットワーク

　ここでは、代表的ネットワークである empty、star、complete ネットワークがナッシュネットワークである条件を分析する。以下の分析では、リンク形成費用は各リンクにおいて一定であるとし、$i \neq j \neq k$ である任意のノード i, j, k に関して $c_{ij}=c_{ik}=c$ であるとする。

【命題６】

$$\max_{i,j\in N}\left\{\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[(1-\alpha_i)(1-\alpha_j)\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}(1-\alpha_y)w_{ij}\right]\right\}<c$$

ならば、empty ネットワークはナッシュネットワークである。

【命題７】

$$\max_{j,k\in N\setminus\{i\}}\left\{\sum_{z=1}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[P\left(\bar{g}^a_{z,\{j,k\},-\{i\}},s\right)w_{kj}\right]\right\}<c<\min_{j,k\in N\setminus\{i\}}\left\{\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[P\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}},s\right)B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\middle|g^s\right)\right]\right\}$$

ならば、star ネットワークはナッシュネットワークである。

【命題８】

$$c<\min_{i,j\in N}\sum_{z=n-3}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}(1-\alpha_y)w_{ji}\right]$$

ならば、complete ネットワークはナッシュネットワークである。

　命題６、命題７、命題８からは、リンク形成費用が十分に高い場合には empty ネットワークがナッシュネットワークとなり、リンク形成費用が中程度の場合には star ネットワークがナッシュネットワークとなり、リンク形成費用が十分に低い場合には、complete ネットワークがナッシュネットワークとなることが分かる。リンク形成費用が低い場合には、多くのノードとリンクを形成することで、複数のノードがノード機能を喪失したとしても多くのネットワークから便益を得る事が出来るように、多くのノードとリンクを形成しようとするインセンティブの方がリンク形成費用よりも高いため、全てのノードが他のノードと積極的にリンクを形成しようとし、complete ネットワークがナッシュネットワークとなるのである。一方、リンク形成費用が高くなってくると、各ノードは、多くのノードとリンクを形成するとリンク形成費用の方がネットワークから得られる期待便益よりも大きくなってしまうため、出来る限り形成するリンクの数を減らそうとする。結果として、ネットワークにおけるリンク数が少ないネットワークがナッシュネットワークとなるのである。

3.3 効率的ネットワーク

　本節では、代表的ネットワークである empty、complete ネットワークが効率的である条件を分析する。

【命題９】

$$\max_{j,k\in N\setminus\{i\}}\left\{\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}C_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}(1-\alpha_y)\left(w_{ji}+w_{ij}+\sum_{k\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}w_{kj}\right)\right]\right\}<c$$

ならば、empty ネットワークは効率的ワークである。

【命題10】

$$c<\min_{i,j\in N}\left[\prod_{x\in N\setminus\{i,j\}}\alpha_x\prod_{y\in\{i,j\}}(1-\alpha_y)(w_{ij}+w_{ji})\right]$$

ならば、complete ネットワークは効率的ネットワークである。

命題９と命題10から、リンク形成費用 c が十分に高い場合には empty ネットワークが効率的ネットワークとなり、逆にリンク形成費用 c が十分に低い場合には、complete ネットワークが効率的ネットワークとなることが分かる。リンク形成費用が低い場合には、多くのノード間にリンクを形成してネットワーク分断リスクを軽減するメリットの方がリンク形成コストよりも高いので、全てのノード間でリンクが形成されている complete ネットワークが社会的に望ましいネットワークとなるのである。一方、リンク形成費用が高くなってくると、各ノードは、多くのノードとリンクを形成するとリンク形成から得られる便益がコストに見合わない為、

ネットワークにおけるリンクを最小限に抑える事が社会的に最適となる。リンク形成費用があまりにも高い場合には、リンクを形成しないことの方が社会的に望ましくなるため、empty ネットワークが効率的ネットワークとなるのである。

おわりに

本稿は Bala and Goyal（2000b）を、ノードの持つ「ネットワークから得る便益をリンクを通じて他のノードへ伝達する」、「自らの便益とネットワークを通じて他のノードから便益を得る」という２つのノード機能が確率的に失われるモデルへと拡張した。また、ノード機能を失う確率をノード自身がノード機能喪失対策費用の投入を行うことによって変化させることができるものとし、ノード機能喪失確率が内生的に決定されるモデルを提示した。

ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいて、いかなるネットワークにおいても最大と最小のナッシュ均衡が存在することを示した。また、empty ネットワーク以外のいかなるネットワークもノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいてナッシュ均衡と効率性を同時達成できないことを示した。また、ナッシュ均衡と効率性のどちらの達成に際しても、他のノードに対して大きな影響を与えるノードほど多くの費用投入が必要となることを示した。

ネットワーク形成ゲームでは、empty ネットワーク、star ネットワーク、complete ネットワークがそれぞれナッシュネットワークである条件と効率的ネットワークである条件をそれぞれ導出した。

最後に本稿における課題を述べる。本稿ではノード機能喪失対策費用投入ゲームとネットワーク形成ゲームはそれぞれ個別に分析を行っている。しかし、ノード機能喪失対策費用投入ゲームの結果がネットワーク形成ゲームに対して及ぼす影響（その逆も同様）は当然無視できないものである。したがって、これら２つのゲームの相互関係を考慮したモデルの構築を行わなければならない。

参考文献

[1] Bala V. and S. Goyal (2000a), "A Non-cooperative Model of Network Formation", *Econometrica*, 68, 1181-1229.

[2] Bala V. and S. Goyal (2000b), "A strategic analysis of network reliability", *Review of Economic Design*, 5, pp.205-228.

[3] Freeman, L.C. (1977), "A set of measures of centrality based on betweeness", *Sociomety*, 40, pp.35-41.

[4] Freeman, L.C., Borgatti, S.P., and White, D.R. (1991), "Centrality in valued graphs: A measure of betweenness based on network flow", *Social Networks*, 13, pp.141-154.

[5] Galeotti, A., Goyal, S., Kamphorst, J., (2006), "Network Formation with Heterogeneous Players", *Games and Economic Behavior*, 54, pp. 353-372.

[6] Haller, H., Kamphorst, J., Sarangi, S. (2007), "(Non-) existence and scope of Nash networks", *Economic Theory*, 31, pp.597-604.

[7] Haller, H., Sarangi, S. (2003) "Nash Networks with Heterogeneous Agents", *mimeo*.

[8] Harary, F. and Ostrand, P. (1971), "Cutting center theorem for trees", *Discrete Mathematics*. 1, pp.7-18.

[9] Jackson, M. O. and A. Wolinsky (1996), "A Strategic Model of Social and Economic Networks", *Journal of Economic Theory*, 71, pp.44-74.

[10] Jun, T. and Kim, J. (2007) "Connectivity, stability and efficiency in a network as an information flow", *Mathematical Social Sciences*, 53, pp.314 – 331.

[11] Milgrom Paul and Jhon Roberts (1990), "Rationalizability, Learning, and Equilibrium in Games with Strategic Complementarities", *Econometrica*, 58, pp.1255-1279.

[12] R. Albert, H. Jeong, A.-L. Barabasi (2000), "Error and attack tolerance of complex networks", *Nature*, 406, pp.378-382.

[13] 宇野木　広樹（2007），「ネットワーク分断リスク下におけるネットワーク効率性・安定性」，『熊本学園大学経済論集』，第13巻，第３・４合併号，2007年，pp. 97-122.

数学付録

（補題１の証明）

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_i \partial s_j} =& \sum_{z=0}^{n-2} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z} \left[\left((-\alpha'_i)(-\alpha'_j) \prod_{x \in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)} \alpha_x \prod_{y \in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right) \setminus \{i,j\}} (1-\alpha_y) \right) \left(w_{ii} + \sum_{k \in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)} w_{ik} \right) \right] \\
&+ \sum_{z=1}^{n-1} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_{z-1}} \left[\left(-\alpha'_i \alpha'_j \prod_{x \in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right) \setminus \{j\}} \alpha_x \prod_{y \in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right) \setminus \{i\}} (1-\alpha_y) \right) \left(w_{ii} + \sum_{k \in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)} w_{ik} \right) \right] \\
=& \sum_{z=0}^{n-2} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z} \left[\left(\alpha'_i \alpha'_j \prod_{x \in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)} \alpha_x \prod_{y \in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right) \setminus \{i,j\}} (1-\alpha_y) \right) \left(w_{ii} + \sum_{k \in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)} w_{ik} \right) \right] \\
&- \sum_{z=0}^{n-2} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z} \left[\left(\alpha'_i \alpha'_j \prod_{x \in Z\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right) \setminus \{j\}} \alpha(s_x) \prod_{y \in I\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right) \setminus \{i\}} (1-\alpha_y) \right) \left(w_{ii} + \sum_{k \in N\left(i;\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)} w_{ik} \right) \right] \\
=& \sum_{z=0}^{n-3} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z} \left[\left(\alpha'_i \alpha'_j \prod_{x \in Z\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right) \setminus \{j\}} \alpha(s_x) \prod_{y \in I\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right) \setminus \{i\}} (1-\alpha_y) \right) \left(\sum_{k \in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)} w_{ik} - \sum_{k \in N\left(i;\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)} w_{ik} \right) \right] \\
&+ \alpha'_i \alpha'_j \prod_{x \in Z\left(\bar{g}^1_{n-2,\{i,j\}}\right)} \alpha_x \left(w_{ii} + \sum_{k \in N\left(i;\bar{g}^1_{n-2,\{i,j\}}\right)} w_{ik} \right) > 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_j^2} =& \sum_{z=0}^{n-2} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z} \left[\left((-\alpha''_j) \prod_{x \in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)} \alpha_x \prod_{y \in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right) \setminus \{j\}} (1-\alpha_y) \right) \left(w_{ii} + \sum_{k \in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)} w_{ik} \right) \right] \\
&+ \sum_{z=1}^{n-1} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_{z-1}} \left[\left(\alpha''_j \prod_{x \in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right) \setminus \{j\}} \alpha_x \prod_{y \in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)} (1-\alpha_y) \right) \left(w_{ii} + \sum_{k \in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)} w_{ik} \right) \right] \\
=& \sum_{z=0}^{n-2} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z} \left[\left((-\alpha''_j) \prod_{x \in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)} \alpha_x \prod_{y \in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right) \setminus \{j\}} (1-\alpha_y) \right) \left(w_{ii} + \sum_{k \in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)} w_{ik} \right) \right] \\
&+ \sum_{z=0}^{n-2} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z} \left[\left(\alpha''_j \prod_{x \in Z\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right) \setminus \{j\}} \alpha(s_x) \prod_{y \in I\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)} (1-\alpha_y) \right) \left(w_{ii} + \sum_{k \in N\left(i;\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)} w_{ik} \right) \right] \\
=& \sum_{z=0}^{n-3} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z} \left[\left(\alpha''_j \prod_{x \in Z\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right) \setminus \{j\}} \alpha(s_x) \prod_{y \in I\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right) \setminus \{i\}} (1-\alpha_y) \right) \left(\sum_{k \in N\left(i;\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)} w_{ik} - \sum_{k \in N\left(i;\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)} w_{ik} \right) \right] \\
&- \alpha''_j \prod_{x \in Z\left(\bar{g}^1_{n-2,\{i,j\}}\right)} \alpha_x \left(w_{ii} + \sum_{k \in N\left(i;\bar{g}^1_{n-2,\{i,j\}}\right)} w_{ik} \right) < 0
\end{aligned}
$$

Q. E. D.

（補題２の証明）いま、任意のノード$j \neq i$がノード機能喪失対策費用投入を増加させたとしよう。このとき$\partial U_i(g,s)/\partial s_i$を全微分し、$s_i$の変化を０とすると以下の式が得られる。

$$d\left(\frac{\partial U_i(g,s)}{\partial s_i}\right)=\sum_{j=1:j\neq i}^{n}\frac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_j\partial s_i}ds_j$$
$$=\frac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_1\partial s_i}ds_1+\cdots+\frac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_{i-1}\partial s_i}ds_{i-1}+\frac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_{i+1}\partial s_i}ds_{i+1}+\cdots+\frac{\partial^2 U_i(g,s)}{\partial s_n\partial s_i}ds_n>0.$$

すなわち、ノード i が s_i のもとで自身の期待利得の最大化を行っていた場合、ノード i 以外のすべてのノードがノード機能喪失対策費用投入を増加させたならば、$\partial U_i(g,s)/\partial s_i>0$ であるので、ノード i は期待利得を最大化するために s_i を増加させる。

Q. E. D.

（命題１の証明）s_i はノード i のノード機能喪失対策費用投入戦略の集合であり実数上の区間である。また、ノード i の期待利得 $U_i(g, s)$ は s_i に関して２回連続微分可能である。さらに補題１より、$\partial^2 U_i(g,s)/\partial s_i\partial s_j>0$ である。以上を踏まえると、Milgrom and Roberts（1990）の定理４より、ノード機能喪失対策費用投入ゲームはスーパーモジュラーゲームであることが示される[8]。また、Milgrom and Roberts（1990）の定理５より、スーパーモジュラーゲームにおいて最大と最小のナッシュ均衡が存在することが保証される。

Q. E. D.

（命題２の証明）いま、$x, y\in S_i$ であり、$\lambda\in[0,1]$ であるとする。このとき、任意の $x, y\in S_i$、$\lambda\in[0,1]$ に関して、
$U_i(g,(\lambda x+(1-\lambda)y,s_{-i}))>\lambda U_i(g,(x,s_{-i}))+(1-\lambda)U_i(g,(y,s_{-i}))$
が成立する。

$$U_i(g,(\lambda x+(1-\lambda)y,s_{-i}))-\lambda U_i(g,(x,s_{-i}))-(1-\lambda)U_i(g,(y,s_{-i}))$$
$$=\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}\mathrm{C}_z}\left\{B_i\left(g^a_{z,\{i\}}\middle|h\right)\left[P\left(g^a_{z,\{i\}},(\lambda x+(1-\lambda)y,s_{-i})\right)-\lambda P\left(g^a_{z,\{i\}},(x,s_{-i})\right)-(1-\lambda)P\left(g^a_{z,\{i\}},(y,s_{-i})\right)\right]\right\}.$$

ここで、$P\left(g^a_{z,\{i\}},(s_i,s_{-i})\right)$ は s_i について狭義凹関数であるので、

$$P\left(g^a_{z,\{i\}},(\lambda x+(1-\lambda)y,s_{-i})\right)-\lambda P\left(g^a_{z,\{i\}},(x,s_{-i})\right)-(1-\lambda)P\left(g^a_{z,\{i\}},(y,s_{-i})\right)>0$$

が成立する。すなわち、$U_i(g, s)$ は s_i に関して狭義凹関数である。

次に、$U_i(g, s)$ は s_i に関して狭義凹関数であるので、ネットワーク価値 $W(g, s^E)$ は s に関して狭義凹関数となる。狭義凹関数の性質から、

---

[8] ゲームにおいて n 人のプレイヤーが存在し、プレイヤー i は k_i 個の要素からなる戦略 $x_i=\left(x_i^1,\ldots,x_i^{k_i}\right)$ を持ち、プレイヤー i の戦略集合を S_i、利得関数 $f_i(x_i, x_{-i})$ とする。任意のプレイヤー i に関して以下を満たすならば、そのゲームはスーパーモジュラーゲームである。
1．戦略集合 S_i は R^{k_i} における区間である。すなわち、$S_i=\left[\underline{y}_i,\bar{y}_i\right]$
2．$f_i(x_i, x_{-i})$ は S_i に関して２回連続微分可能である。
3．任意の i と $1\leq s\leq t\leq k_i$ である任意の s, t に関して、$\partial^2 f_i/\partial x_i^s\partial x_i^t\geq 0$ である。
4．任意の $i, j\neq i$ と $1\leq s\leq k_i$、$1\leq t\leq k_j$ である任意の s, t に関して、$\partial^2 f_i/\partial x_i^s\partial x_j^t\geq 0$ である。

任意の $i \neq j$ であるノード i, j に対して(5)式を満たす $s^E = \left(s_1^E, \ldots, s_n^E\right)$ の下で $W(g, s^E)$ は唯一の最大値をとる。

Q. E. D.

（命題３の証明）いま、任意の g を所与として、$s^{E*} = \left(s_1^{E*}, \ldots, s_n^{E*}\right)$ がナッシュ均衡であり、かつ効率的となる条件を求める。g を所与として、$s^{E*} = \left(s_1^{E*}, \ldots, s_n^{E*}\right)$ がナッシュ均衡であり、かつ効率的となる必要十分条件は以下である。
任意の $i \neq j$ であるノード i, j に対して、$s^{E*} = \left(s_1^{E*}, \ldots, s_n^{E*}\right)$ のもとで

$$\frac{\partial U_i\left(g, s^{E*}\right)}{\partial s_i^{E*}} = \frac{\partial U_j\left(g, s^{E*}\right)}{\partial s_j^{E*}} = 0,$$

$$\sum_{\varepsilon \in N \setminus \{i\}} \left(\frac{\partial U_\varepsilon\left(g, s^{E*}\right)}{\partial s_i^{E*}} \right) = \sum_{\tau \in N \setminus \{j\}} \left(\frac{\partial U_\tau\left(g, s^{E*}\right)}{\partial s_j^{E*}} \right) = 0$$

が同時に満たされる。

いま任意の g のもとで、任意の $i \neq j$ であるノード i, j に関して $\partial U_j\left(g, s\right) / \partial s_i$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_j\left(g, s\right)}{\partial s_i} &= \sum_{z=0}^{n-2} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z} \left[-\alpha_i' \prod_{x \in Z\left(\bar{g}_{z,\{i,j\}}^a\right)} \alpha_x \prod_{y \in I\left(\bar{g}_{z,\{i,j\}}^a\right) \setminus \{i\}} \left(1 - \alpha_y\right) B_j\left(\bar{g}_{z,\{i,j\}}^a \middle| \bar{g}\right) \right] \\
&\quad + \sum_{z=1}^{n-1} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_{z-1}} \left[\alpha_i' \prod_{x \in Z\left(\bar{g}_{z,\{j\},-\{i\}}^a\right) \setminus \{i\}} \alpha_x \prod_{y \in I\left(\bar{g}_{z,\{j\},-\{i\}}^a\right)} \left(1 - \alpha_y\right) B_j\left(\bar{g}_{z,\{j\},-\{i\}}^a \middle| \bar{g}\right) \right]. \qquad (7) \\
&= \sum_{z=0}^{n-2} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z} \left[-\alpha_i' \prod_{x \in Z\left(\bar{g}_{z,\{i,j\}}^a\right)} \alpha_x \prod_{y \in I\left(\bar{g}_{z,\{i,j\}}^a\right) \setminus \{i\}} \left(1 - \alpha_y\right) B_j\left(\bar{g}_{z,\{i,j\}}^a \middle| \bar{g}\right) \right] \\
&\quad + \sum_{z=0}^{n-2} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z} \left[\alpha_i' \prod_{x \in Z\left(\hat{g}_{z+1,\{j\},-\{i\}}^a\right) \setminus \{i\}} \alpha_x \prod_{y \in I\left(\hat{g}_{z+1,\{j\},-\{i\}}^a\right)} \left(1 - \alpha_y\right) B_j\left(\hat{g}_{z+1,\{j\},-\{i\}}^a \middle| \bar{g}\right) \right] \\
&= \sum_{z=0}^{n-2} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z} \left[\alpha_i' \prod_{x \in Z\left(\bar{g}_{z,\{i,j\}}^a\right)} \alpha_x \prod_{y \in I\left(\bar{g}_{z,\{i,j\}}^a\right) \setminus \{i\}} \left(1 - \alpha_y\right) \left[B_j\left(\hat{g}_{z+1,\{j\},-\{i\}}^a \middle| \bar{g}\right) - B_j\left(\bar{g}_{z,\{i,j\}}^a \middle| \bar{g}\right) \right] \right] \geq 0.
\end{aligned}$$

上式が０と等しくなる状況は、g においてノード i とノード j の間に経路が存在しない状況のみである。もしも g が empty ネットワークならば、任意のノード間に経路が存在しないので、任意のノード i に関して $\partial U_i\left(g, s^{E*}\right) / \partial s_i^{E*} = 0$ かつ $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left(\partial U_j\left(g, s^{E*}\right) / \partial s_i^{E*} \right) = 0$ が成立する。一方、g が empty ネットワークではないならば、g においてあるノード i, j 間にリンクが存在するので $\partial U_j\left(g, s\right) / \partial s_i > 0$, $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} \left(\partial U_j\left(g, s\right) / \partial s_i \right) > 0$ となり、ナッシュ均衡と効率性の同時達成条件を満たさない。よって、ノード機能喪失対策費用投入ゲームにおいてナッシュ均衡と効率性を同時に達成できるのは empty ネットワークだけである。

Q. E. D.

（補題３の証明）各ノードは同質であり、$w_{ii} = w_{jj}$ であるとする。いま $k \in N(j; \bar{g})$ だが $k \notin N(j; \bar{g})$ であるようなノード k が存在すると仮定しよう。もしもノード i とノード k 以外の全てのノードが機能を失った場合、$B_i\left(\bar{g}_{n-2,\{i,k\}}^a \middle| \bar{g}\right) = w_{ii}$ となる。一方、ノード j とノード k 以外の全てのノードが機能を失った場合、$B_j\left(\bar{g}_{n-2,\{j,k\}}^a \middle| \bar{g}\right) = w_{jj} + w_{kj}$ となる。$w_{ii} = w_{jj}$ であるので、$B_i\left(\bar{g}_{n-2,\{i,k\}}^a \middle| \bar{g}\right) < B_i\left(\bar{g}_{n-2,\{i,k\}}^a \middle| \bar{g}\right)$ となる。よって対偶により示された。

Q. E. D.

（命題 4 の証明）いま、s^* がナッシュ均衡であり、$I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\setminus\{i\}=I\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\setminus\{j\}$ かつ $Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\setminus\{i\}=Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\setminus\{j\}$ である任意の潜在ネットワーク $\bar{g}^a_{z,\{i\}}$ と $\bar{g}^a_{z,\{j\}}$ に関して $B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}|\bar{g}\right)\geq B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}|\bar{g}\right)$ が成立すると仮定する。

s^* がナッシュ均衡であるので、任意のノード i,j に関して以下のことが成立している。

$$\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}\mathrm{C}_z}\left[-\alpha'_i\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}|\bar{g}\right)\right]=-1. \tag{8}$$

$$\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}\mathrm{C}_z}\left[-\alpha'_j\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\setminus\{j\}}\left(1-\alpha_y\right)B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}|\bar{g}\right)\right]=-1. \tag{9}$$

いま、$B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}|\bar{g}\right)>B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}|\bar{g}\right)$ であると仮定し、(8)式＝(9)式として以下のように変形する。

$$\begin{aligned}
&\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[-\alpha'_i\left(1-\alpha_j\right)\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(h^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}|\bar{g}\right)\right]\\
&\quad+\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_{z-1}}\left[-\alpha'_i\alpha_j\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{j\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)\right]\\
&=\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[-\alpha'_j\left(1-\alpha_i\right)\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}|\bar{g}\right)\right]\\
&\quad+\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_{z-1}}\left[-\alpha'_j\alpha_i\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j\},-\{i\}}\right)\setminus\{i\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{j\},-\{i\}}\right)\setminus\{j\}}\left(1-\alpha_y\right)B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)\right].
\end{aligned}$$

上式をさらに次のように変形する。

$$\begin{aligned}
&\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\Biggl\{\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)\\
&\qquad\left[-\alpha'_i\left(1-\alpha_j\right)B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}|\bar{g}\right)+\alpha'_j\left(1-\alpha_i\right)B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}|\bar{g}\right)\right]\Biggr\}\\
&+\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_{z-1}}\Biggl\{\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{j\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)\\
&\qquad\left[-\alpha'_i\alpha_jB_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\},-\{j\}}|\bar{g}\right)+\alpha'_j\alpha_iB_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\},-\{i\}}|\bar{g}\right)\right]\Biggr\}=0.
\end{aligned}$$

上式を次のように変形する。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\Bigg\{\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)\\
&\qquad\left[-\alpha'_i\left(1-\alpha_j\right)B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\middle|\bar{g}\right)+\alpha'_j\left(1-\alpha_i\right)B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\middle|\bar{g}\right)\right]\Bigg\}\\
&+\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\Bigg\{\prod_{x\in Z\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{j\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)\\
&\qquad\left[-\alpha'_i\alpha_jB_i\left(\hat{g}^a_{z+1,\{i\},-\{j\}}\middle|\bar{g}\right)+\alpha'_j\alpha_iB_j\left(\hat{g}^a_{z+1,\{j\},-\{i\}}\middle|\bar{g}\right)\right]\Bigg\}=0.
\end{aligned}
$$

さらに変形することで次の式を得る。

$$
\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\Bigg\{\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)\left[-\alpha'_iB_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\middle|\bar{g}\right)+\alpha'_jB_j\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\middle|\bar{g}\right)\right]\Bigg\}=0. \tag{10}
$$

いま、$B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\middle|\bar{g}\right)>B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\middle|\bar{g}\right)$ であると仮定しているので、⑽式が成立するためには $s_i^*\geq s_j^*$ でなければならない。

Q. E. D.

（命題５の証明）いま、任意のノード $i, j\in N$ に関して $w_{ii}=w_{jj}$ であり、s^E が効率的であるとしよう。s^E が効率的であるので、任意のノード i, $j\in N$ に関して以下が成立しなければならない。

$$
\left[\frac{\partial U_i\left(g,s^E\right)}{\partial s_i^E}-\frac{\partial U_j\left(g,s^E\right)}{\partial s_j^E}\right]+\left[\sum_{\varepsilon\in N\setminus\{i\}}\left(\frac{\partial U_\varepsilon\left(g,s^E\right)}{\partial s_i^E}\right)-\sum_{\tau\in N\setminus\{j\}}\left(\frac{\partial U_\tau\left(g,s^E\right)}{\partial s_j^E}\right)\right]=0. \tag{11}
$$

いま、$s_i^E=s_j^E$ であるとしよう。このとき、⑾式の第１項目は命題４から $s_i^E=s_j^E$ ならば正の値をとることがわかる。一方、⑾式の第２項目の大小関係を以下で確認する。

ここで、任意のノード $i, j\in N$ に関して $\partial U_\varepsilon\left(g,s^E\right)/\partial s_i^E-\partial U_\varepsilon\left(g,s^E\right)/\partial s_j^E$ を計算する。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_i^E}-\frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_j^E}\\
&=\left(-\alpha'_i+\alpha'_j\right)\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i,j\}}\middle|\bar{g}\right)\right]\\
&+\left(-\alpha'_i-\alpha'_j\right)\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)\setminus\{j\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\middle|\bar{g}\right)\right]\\
&+\left(\alpha'_i+\alpha'_j\right)\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\setminus\{i\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\setminus\{j\}}\left(1-\alpha_y\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\bar{g}\right)\right]\\
&+\left(\alpha'_i-\alpha'_j\right)\sum_{z=2}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon\},-\{i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon\},-\{i,j\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon\},-\{i,j\}}\middle|\bar{g}\right)\right]
\end{aligned}
$$

以下のように変形する。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_i^E}-\frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_j^E}\\
&=\left(-\alpha_i'+\alpha_j'\right)\sum_{z=0}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i,j\}}\middle|\bar{g}\right)\right]\\
&+\left(-\alpha_i'-\alpha_j'\right)\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)\setminus\{j\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)\setminus\{i\}}\left(1-\alpha_y\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\middle|\bar{g}\right)\right]\\
&+\left(\alpha_i'+\alpha_j'\right)\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\setminus\{i\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\setminus\{j\}}\left(1-\alpha_y\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\bar{g}\right)\right]\\
&+\left(\alpha_i'-\alpha_j'\right)\sum_{z=2}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon\},-\{i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon\},-\{i,j\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon\},-\{i,j\}}\middle|\bar{g}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$\hat{p}\left(\bar{g}^a_z\right)$は$I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)\setminus\{i\}=I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\setminus\{j\}$と$Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)\setminus\{j\}=Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\setminus\{i\}$から与えられる任意の$\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{i\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)$を表している。ここで、$s_i^E=s_j^E$であるので、以下のようになる。

$$
\frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_i^E}-\frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_j^E}=\sum_{z=1}^{n-1}\sum_{a=1}^{{}_{n-1}\mathrm{C}_z}\hat{p}\left(\bar{g}^a_z\right)\left[\alpha_i'B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\bar{g}\right)-\alpha_j'B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\middle|\bar{g}\right)\right]
$$

ここで、$B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\middle|\bar{g}\right)$と$B_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\bar{g}\right)$の大小関係を見る。$l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$が存在する任意の$\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$においては、$V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\middle|\bar{g}\right)=V_i\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\middle|\bar{g}\right)$である。また$w_{ii}=w_{jj}$、$I\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\setminus\{i\}=I\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\setminus\{j\}$かつ$Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\right)\setminus\{i\}=Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\right)\setminus\{j\}$である任意の潜在ネットワーク$\bar{g}^a_{z,\{i\}}$と$\bar{g}^a_{z,\{j\}}$に関して$B_i\left(\bar{g}^a_{z,\{i\}}\middle|\bar{g}\right)\geq B_j\left(\bar{g}^a_{z,\{j\}}\middle|\bar{g}\right)$を仮定しているので、$V_i\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\middle|\bar{g}\right)\geq V_j\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\bar{g}\right)$である。一方、$l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)$が存在する$\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}$では$V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\bar{g}\right)=V_j\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\bar{g}\right)$である。すなわち、$l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$が存在する任意の$\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$と$l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)$が存在する$\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}$においては$V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\middle|\bar{g}\right)\geq V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\bar{g}\right)$である。次に$l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)$が存在しない任意の$\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}$では、経路の存在するノード$k\neq i,j,\varepsilon$と同じ総便益をネットワークから得る。したがって、$V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\bar{g}\right)=V_k\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\bar{g}\right)$である。ここで、$l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)$が存在しない任意の$\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}$における$I\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\setminus\{j\}$と$Z\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)\setminus\{i\}$から構成される$l_{\varepsilon j}\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$が存在する任意の$\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$においては、$V_\varepsilon\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\middle|\bar{g}\right)\geq V_k\left(\bar{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\bar{g}\right)$と

なる。なぜならば、これらの潜在ネットワークにおける相違はノード i もしくはノード j のどちらが機能を失っているかという点だけであり、他のノードの機能喪失状況は全く同じである。したがって、$l_{\varepsilon j}\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)$ が存在しない $\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}$ で便益を得ていたノード $k \neq i, j, \varepsilon$ とも $l_{\varepsilon j}\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在する $\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$ において便益を得ることができる。さらに、この $\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$ では $l_{\varepsilon j}\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在しているので、ノード j を経由して他のノードから便益を得ることができるかもしれない。したがって、

$V_\varepsilon\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\middle|\overline{g}\right) \geq V_k\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\overline{g}\right)$ となる。

次に $l_{\varepsilon j}\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在しない任意の $\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$ について考える。$l_{\varepsilon j}\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在しない任意の $\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$ においては、経路の存在するノード $k \neq i, j, \varepsilon$ と同じ総便益をネットワークから得る。したがって、

$V_\varepsilon\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\middle|\overline{g}\right) = V_k\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\middle|\overline{g}\right)$ である。ここで、ノード i がノード機能を失っていないにもかかわらず、$l_{\varepsilon j}\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在しないということは、$l_{\varepsilon j}\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在しない任意の $\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$ における $I\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right) \setminus \{i\}$ と $Z\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right) \setminus \{j\}$ から構成される任意の $\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}$ においては、$l_{\varepsilon j}\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right)$ もまた存在しない。なぜならば、補題3からノード i はノード j が直接リンクを持つ全てのノードとはリンクを形成しているはずであり、$l_{\varepsilon j}\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right)$ が存在しないということは、ノード ε とノード j が直接リンクを持つ全てのノードとの経路が存在していないことを意味する。すなわち、

$V_\varepsilon\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\overline{g}\right) = V_k\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\overline{g}\right)$ である。したがって、$V_\varepsilon\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\middle|\overline{g}\right) = V_\varepsilon\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\overline{g}\right)$ である。

以上より、任意の $I\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right) \setminus \{i\} = I\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right) \setminus \{j\}$ かつ $Z\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\right) \setminus \{i\} = Z\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\right) \setminus \{j\}$ である任意の潜在ネットワーク $\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}$ と $\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}$ に関して $B_\varepsilon\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\middle|\overline{g}\right) \geq B_\varepsilon\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\overline{g}\right)$ が成立する。したがって、

$$\frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_i^E} - \frac{\partial U_\varepsilon(g,s)}{\partial s_j^E} = \sum_{z=1}^{n-1} \sum_{a=1}^{{}_{n-1}\mathrm{C}_z} \hat{p}\left(\overline{g}^a_z\right)\left[\alpha'_i B_\varepsilon\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,j\},-\{i\}}\middle|\overline{g}\right) - \alpha'_j B_\varepsilon\left(\overline{g}^a_{z,\{\varepsilon,i\},-\{j\}}\middle|\overline{g}\right)\right] \geq 0.$$

補題1から、$\partial^2 U_i(g,s)/\partial s_j^2 < 0$ なので、s_i^E を増加させることで $\partial U_\varepsilon(g,s)/\partial s_i^E$ は減少する。したがって、⑾式を満たすためには $s_i^E \geq s_j^E$ でなければならない。

Q. E. D.

（命題6の証明）いま、次の⑿式が成立しているとする。

$$\max_{i,j\in N}\left\{\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\left(1-\alpha_i\right)\left(1-\alpha_j\right)\prod_{x\in Z\left(\overline{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x \prod_{y\in I\left(\overline{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)w_{ij}\right]\right\} < c \tag{12}$$

もしも、empty ネットワークにおいて、ノード i がノード $j \neq i$ とリンクを形成した場合、追加的に得られる期待利得は以下のようになる。

$$U_i\left(g_{i,\{j\}}\oplus g_{-i}^{e},s^{*}\right)-U_i\left(g^{e},s^{*}\right)$$
$$=\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\left(1-\alpha_i\right)\left(1-\alpha_j\right)\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i,j\}}\right)\setminus\{i,j\}}\left(1-\alpha_y\right)w_{ij}\right]-c.$$

ここで、g_{-i}^{e}はemptyネットワークからノードiのリンク形成戦略を削除したものであり、$g_{i,\{j_1,\cdots,j_m\}}$は$g_{ij_1}=\cdots=g_{ij_m}=1$であり任意のノード$k\in N\setminus\{i,j_1\cdots,j_m\}$に関して$g_{ik}=0$であるようなノード$i$のリンク形成戦略であるとする。また、ノード$i$がノード$j_1\cdots,j_m$とリンクを形成した場合、追加的に得られる期待利得は以下のように表現できる。

$$U_i\left(g_{i,\{j_1,\cdots,j_m\}}\oplus g_{-i}^{e},s^{*}\right)-U_i\left(g^{e},s^{*}\right)$$
$$=\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\left(1-\alpha_i\right)\left(1-\alpha_{j_1}\right)\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i,j_1\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i,j_1\}}\right)\setminus\{i,j_1\}}\left(1-\alpha_y\right)w_{ij_1}\right]$$
$$+\cdots+\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\left(1-\alpha_i\right)\left(1-\alpha_{j_n}\right)\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i,j_m\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i,j_m\}}\right)\setminus\{i,j_m\}}\left(1-\alpha_y\right)w_{ij_m}\right]-mc$$
$$=\left[U_i\left(g_{i,\{j_1\}}\oplus g_{-i}^{e},s^{*}\right)-U_i\left(g^{e},s^{*}\right)\right]+\cdots+\left[U_i\left(g_{i,\{j_m\}}\oplus g_{-i}^{e},s^{*}\right)-U_i\left(g^{e},s^{*}\right)\right].$$

もしも⑿式が成立しているならば、ノードiは任意の他のノードjとリンクを形成したとしても、$U_i\left(g_{i,\{j\}}\oplus g_{-i}^{e},s^{*}\right)-U_i\left(g^{e},s^{*}\right)<0$が成立する。また、このことは全てのノードにもいえるので、全てのノードはどのノードともリンクを形成しない事が唯一の最適反応である。よって、⑿式のもとではemptyネットワークg^eはナッシュネットワークである。

Q. E. D.

（命題7の証明）いま、次の⒀式が成立しているとする。

$$\max_{j,k\in N\setminus\{i\}}\left\{\sum_{z=1}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[P\left(\bar{g}^{a}_{z,\{j,k\},-\{i\}},s\right)w_{kj}\right]\right\}<c<\min_{j,k\in N\setminus\{i\}}\left\{\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[P\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i,j\}},s\right)B_i\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i,j\}}\middle|g^{s}\right)\right]\right\} \tag{13}$$

いま、starネットワークにおいて、centralノードをiとしよう。まず、このcentralノードがstarネットワークにおいてリンク形成戦略を変更しない条件を考える。centralノードは他の全てのノードとの間にリンクが形成されているので、他の任意のノードとのリンクを削除しない条件を考える。もしも、starネットワークにおいて、centralノードiが費用を拠出してノードjとリンクを形成しているとして、リンクijを削除したら、centralノードiが追加的に得る期待利得は以下のようになる。

$$c-\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^{a}_{z,\{i,j\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)w_{ji}\right].$$

したがって、centralノードiが任意のノードとのリンクを削除しない条件は次のようになる。

$$c<\min_{j\in N\setminus\{i\}}\left\{\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)w_{ji}\right]\right\} \tag{14}$$

つぎに、central ノードではない任意のノード j が star ネットワークにおいてリンク形成戦略を変更しない条件を考える。まず、ノード j が他のノード k と追加的にリンクを形成した場合、ノード j が追加的に得る期待利得は以下のようになる。

$$\sum_{z=1}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j,k\},-\{i\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{j,k\},-\{i\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)w_{kj}\right]-c.$$

したがって、任意のノード j が任意の他のノード k と追加的にリンクを形成しない条件は次のようになる。

$$\max_{j,k\in N\setminus\{i\}}\left\{\sum_{z=1}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{j,k\},-\{i\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{j,k\},-\{i\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)w_{kj}\right]\right\}<c. \tag{15}$$

また、ノード j が費用を拠出して central ノード i とリンクを形成しているとして、リンク ji を削除したら、ノード j が追加的に得る期待利得は以下のようになる。

$$c-\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)\left(w_{ij}+\sum_{k\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}w_{kj}\right)\right]$$

したがって、任意のノード j が central ノード i とのリンクを削除しない条件は次のようになる。

$$c<\min_{j,k\in N\setminus\{i\}}\left\{\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)\left(w_{ij}+\sum_{k\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}w_{kj}\right)\right]\right\} \tag{16}$$

⒀式のもとでは⒁、⒂、⒃式が同時に成立する。したがって、⒀式のもとでは star ネットワークはナッシュネットワークである。

Q. E. D.

（命題８の証明）いま、次の⒄式が成立しているとする。

$$c<\min_{i,j\in N}\sum_{z=n-3}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)w_{ji}\right]. \tag{17}$$

いま、complete ネットワークにおいて、任意のノード i がリンク形成戦略を変更しない条件を考える。complete ネットワークにおいて任意のノード間にはリンクが形成されているので、任

意のノード間でリンクを削除しない条件を考える。もしも、complete ネットワークにおいて、ノード i が費用を拠出してノード j とリンクを形成しているとして、リンク ij を削除したら、ノード i が追加的に得る期待利得は以下のようになる。

$$c-\sum_{z=n-3}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)w_{ji}\right].$$

(17)式のもとでは、complete ネットワークにおいて、任意のノードはリンクを削除することで追加的な正の利得を得ることが出来ない。したがって、(17)式のもとでは complete ネットワークはナッシュネットワークである。

Q. E. D.

（命題９の証明）いま、次の(18)式が成立しているとする。

$$\max_{j,k\in N\setminus\{i\}}\left\{\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)\left(w_{ji}+w_{ij}+\sum_{k\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}w_{kj}\right)\right]\right\}<c \tag{18}$$

リンク ij によって得ることの出来るノード間に形成されるリンクによって得ることの出来る最大の期待利得は以下の通りである。

$$\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)\left(w_{ij}+\sum_{k\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}w_{kj}\right)\right]+\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)w_{ji}\right]$$

第１項目はリンク ij からノード i が得る期待便益に相当し、第２項目はリンク ij からノード j が得る期待便益に相当している。したがって、もしも以下の条件が成立するならば、いかなるネットワークであろうとも、リンク ij から得られるノード i とノード j の得る期待利得の合計は負となる。

$$\sum_{z=0}^{n-2}\sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z}\left[\prod_{x\in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\alpha_x\prod_{y\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}\left(1-\alpha_y\right)\left(w_{ji}+w_{ij}+\sum_{k\in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)}w_{kj}\right)\right]<c$$

もしも、(18)式が成立するならば、ネットワークに形成されるいかなるリンクからも正の期待利得を得ることができない。したがって、任意のノード間にリンクが形成されていないことが最もネットワーク価値が高くなる。したがって、(18)式のもとでは empty ネットワークが効率的ネットワークとなる。

Q. E. D.

（命題10の証明）いま、次の(19)式が成立しているとする。

$$c < \min_{i,j \in N} \left[\prod_{x \in N \setminus \{i,j\}} \alpha_x \prod_{y \in \{i,j\}} (1-\alpha_y)(w_{ij}+w_{ji}) \right]. \tag{19}$$

complete ネットワークにおいて、任意のノード i, j 間のリンク $ij \in g^c$ が価値を持つ状況は、ノード間の便益の伝達がリンク ij のみでしか行われない、すなわちノード i とノード j をつなぐ経路がリンク ij のみになった場合である。このような状況は complete ネットワークにおいて、ノード i, j 以外の n − 2 個のノードが消失してしまう場合に相当する。したがって、complete ネットワークにおける任意のノード i, j 間のリンク ij のリンクの価値は以下のようになる。

$$\begin{aligned} W(g^c, s) - W(g^c - ij, s) = &\left\{ \sum_{z=n-2}^{n-2} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z} \left[\prod_{x \in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)} \alpha_x \prod_{y \in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)} (1-\alpha_y) w_{ji} \right] \right\} \\ &- \left\{ \sum_{z=n-2}^{n-2} \sum_{a=1}^{{}_{n-2}\mathrm{C}_z} \left[\prod_{x \in Z\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)} \alpha_x \prod_{y \in I\left(\bar{g}^a_{z,\{i,j\}}\right)} (1-\alpha_y) w_{ij} \right] \right\} - c \end{aligned}$$

ここで、上式にて、$g^c - ij$ は complete ネットワークからリンク ij を削除したネットワークを表している。いま、(19)式のもとでは任意のノード i, j 間のリンク価値は正となる。したがって、全てのノード間にリンクを形成することでネットワーク価値を最大化できる。以上より、(19)式のもとで complete ネットワークは効率的ネットワークである。

Q. E. D.